



# Calcul intégral et intégration parties

## 1. Définition d'une intégrale, premières propriétés

### A. Intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a; b]$

**Définition 14.1** Soit  $f$  une fonction continue et positive sur  $[a; b]$  ; on note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère. On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$  et on note  $\int_a^b f(x)dx$  le réel représentant l'aire, en unités d'aire, de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

**Remarque 14.1** La variable  $x$  est dite muette :  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots$

Dans le cas de la définition ( $f$  positive) on a  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .

### B. Propriétés fondamentales

**Propriété 14.1 (admise)** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies, continues et positives<sup>a</sup> sur un intervalle  $[a; b]$ . Alors on a :

- la relation de CHASLES pour les intégrales : pour tout  $c \in [a; b]$ ,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- l'inversion des bornes change le signe :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

- la linéarité : pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  réels positifs,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

- l'ordre : si pour tout  $x \in [a; b]$  on a  $f(x) \leq g(x)$  alors  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$  ;
- la parité : si  $f$  est paire alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

<sup>a</sup>. Ce sera vrai pour des fonctions de signe quelconque, voir Pté 14.2

**Idée de la démonstration :** Considérer chaque intégrale comme une aire.

**Remarque 14.2** Lorsque  $a > b$ , on pose  $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$  et lorsque  $a = b$  on pose  $\int_a^a f(x)dx = 0$ .

### C. Cas d'une fonction négative sur $[a; b]$

**Définition 14.2** Soit  $f$  une fonction continue et négative sur un intervalle  $[a; b]$ . On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a; b]$  et on note  $\int_a^b f(x)dx$  le réel égal à  $-\int_a^b |f(x)| dx$ .

**Remarque 14.3** Dans ce cas l'intégrale est négative.

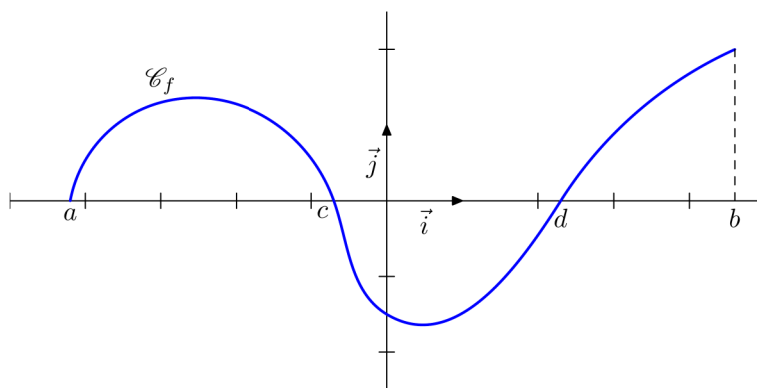
En fait, on applique la propriété de linéarité avec  $\alpha = -1$  et  $\beta = 0$ .

La propriété 14.1 est aussi vraie pour le cas des fonctions continue et négatives sur  $[a; b]$ .

### D. Cas d'une fonction de signe quelconque

Pour calculer l'intégrale sur  $[a; b]$  d'une fonction  $f$  de signe quelconque, on découpe l'intervalle  $[a; b]$  en intervalles où  $f$  est de signes constant et on applique les définitions précédentes.

Par exemple, pour une fonction  $f$  dont la représentation graphique est donnée ci-dessous, on a :



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

**Propriété 14.2** La propriété 14.1 reste vraie pour deux fonctions de signes quelconques.

**Exemple 14.1** Déterminer le signe de  $\int_0^2 \frac{x-8}{x^3+1} dx$ .

Pour tout  $x \in [0; 2]$ , on a  $x-8 < 0$  et  $x^3+1 > 0$  donc  $\frac{x-8}{x^3+1} < 0$  et  $0 < 2$  donc  $\int_0^2 \frac{x-8}{x^3+1} dx < 0$ .

Attention, l'hypothèse  $0 < 2$  est importante à vérifier, en effet sinon, on aurait par exemple  $\int_2^0 \frac{x-8}{x^3+1} dx > 0$ .

**Méthode** Après avoir "découpé" l'intégrale de la fonction  $f$  à étudier en intervalles où  $f$  est de signe constant, on peut savoir si l'intégrale obtenue sur chacun de ces intervalles sera positive ou négative. Soit  $[a; b]$  un intervalle sur lequel  $f$  est de signe constant. En suivant le "bord" de la surface correspondant à l'intégrale (on va de  $a$  vers  $b$ , puis on fait "tout le tour"), on obtient une courbe fermée orientée.

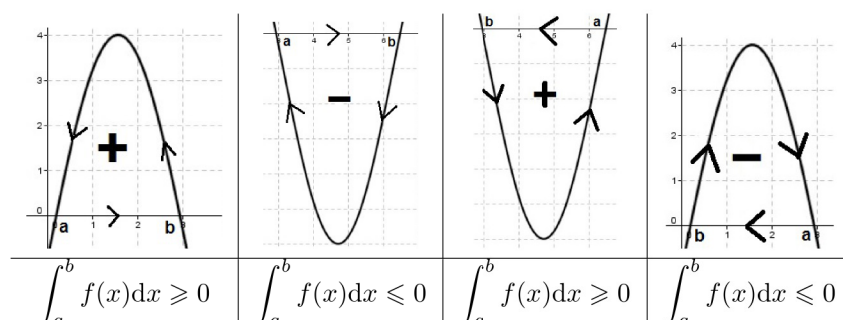
Si cette courbe est orientée dans le sens positif, alors  $\int_a^b f(x)dx$  sera positif. Sinon,  $\int_a^b f(x)dx$  sera négatif.



Les sens "positif" et "négatif" correspondent aux sens de parcours du cercle trigonométrique. On peut utiliser la "méthode de la main droite" (gauchers, méfiez-vous !):

Si votre pouce est vers vous, l'orientation est positive. Si votre pouce est vers la feuille, l'orientation est négative.

Le tableau suivant résume les différents cas possibles :



## 2. Calculer une intégrale grâce à une primitive

**Propriété 14.3** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $a \in I$ . Alors la fonction  $F$  définie sur  $I$  par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Démonstration** (cas où  $f$  est croissante sur  $I$ )

On pose, pour tout  $x \in I$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Soit  $x_0 \in I$ .

Montrons que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ . Pour  $x \neq x_0$  on a :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left( \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt$$

Si  $x_0 < x$  alors pour tout  $t \in [x_0; x]$  on a  $f(x_0) \leq f(t) \leq f(x)$  (car  $f$  est croissante sur  $I$ ), or  $x_0 < x$  donc en intégrant membre à membre, il vient :

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)dt \leq f(x) \\ \text{donc } f(x_0) &\leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x) \end{aligned}$$

De la même façon, si  $x < x_0$  on obtient  $f(x) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0)$ .

Or  $f$  est une fonction continue donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  et donc à l'aide du théorème des gendarmes (théorème 5.3 page 66), on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

Donc  $F$  est dérivable en  $x_0$  et  $F'(x_0) = f(x_0)$ . Ceci est vrai pour tout  $x_0 \in I$  donc  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ . La fonction  $F$  est donc bien une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Remarque 14.4 (Conséquence)** Toutes les primitives de  $f$  sur  $I$  sont de la forme :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt + k, \text{ ou } k \in \mathbb{R}$$

**Remarque 14.5** En particulier, pour toute fonction  $f$  continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ , pour toute primitive  $F$  de  $f$  on a :  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ .

**Propriété 14.4** Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et soit  $a \in I$ . Alors la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  est la primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .

**Remarque 14.6** Ainsi, les intégrales permettent d'écrire les primitives des fonctions qui ne « rentrent » pas dans le formulaire des primitives de la page 90 (exemple 7.9).

**Exemple 14.2** La primitive de  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  qui s'annule en  $t = 1$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt$ .

**Propriété 14.5** Toute fonction  $f$  continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

**Démonstration** On étudie le cas où  $f$  est définie sur  $I = [a; b]$ , et on admet que  $f$  a un minimum  $m$  sur  $[a; b]$ . Soit  $g : x \mapsto f(x) - m$ .  $g$  est continue et positive\* sur  $[a; b]$ . D'après la remarque 14.5,  $g$  admet donc une primitive  $G$  sur  $[a; b]$ . Pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $G'(x) = f(x) - m$ . On définit la fonction  $F$  sur  $[a; b]$  par :  $F(x) = G(x) + mx$ .  $F$  est dérivable sur  $[a; b]$  et, pour tout  $x \in [a; b]$ ,  $F'(x) = G'(x) + m = f(x)$ . Ainsi,  $f$  admet  $F$  pour primitive sur  $[a; b]$ .  
\*Le programme demande que pour ce ROC on se ramène ainsi à une fonction continue positive.

**Théorème 14.1** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$  et soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$ . Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

**Démonstration**  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a; b]$  donc il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \in [a; b]$  on a :  $F(x) = \int_a^x f(t)dt + k$ . On a alors  $F(a) = k$  et  $F(b) = \int_a^b f(t)dt + k$  donc  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - k = F(b) - F(a)$ .

**Remarque 14.7 (Notation)** La différence  $F(b) - F(a)$  se note  $[F(x)]_a^b$  et se dit « la valeur de  $F$  entre  $a$  et  $b$  ».

**Exemple 14.3** Calculer  $\int_0^1 2t(t^2 + 1)^3 dt$ .

Soit  $f : t \mapsto 2t(t^2 + 1)^3$ . La fonction  $f$  est de la forme  $f = u' \times u^3$  où  $u(t) = (t^2 + 1)$ . Une primitive de  $f$  est donc  $F : t \mapsto \frac{1}{4}(u(t))^4 = \frac{1}{4}(t^2 + 1)^4$ .

Donc  $\int_0^1 2t(t^2 + 1)^3 dt = [F(t)]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{4} \times 16 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$ .

### 3. intégration par parties

**Propriété 14.6** Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , et dont les dérivées  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ . Soient  $a, b \in I$ . Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

**Démonstration** Les fonctions  $u$  et  $v$  sont dérivables sur  $I$ , donc la fonction  $uv$  l'est aussi, et  $(uv)' = u'v + uv'$ .

Donc  $\forall x \in I, u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$ .

Or les fonctions  $u$  et  $v$  sont continues sur  $I$  car elles sont dérivables sur  $I$ .

De plus,  $u'$  et  $v'$  sont continues sur  $I$ , donc  $uv'$  et  $u'v$  le sont également.

Donc  $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b ((uv)'(x) - u'(x)v(x))dx = \int_a^b (uv)'(x)dx - \int_a^b u'(x)v(x)dx$  (par linéarité)

Or une primitive de  $(uv)'$  est  $(uv)$ , donc

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Si l'on ne sait pas trouver une primitive de l'intégrande, un bon choix des fonctions  $u$  et  $v$  peut nous tirer d'affaire...

**Exemple 14.4** Calcul de  $\int_0^\pi x \sin(x)dx$ .

On pose  $u(x) = x$  et  $v'(x) = \sin(x)$ , donc  $u'(x) = 1$  et  $v(x) = -\cos(x)$ .

$u, v$  sont dérivables et de dérivées continues sur  $[0; \pi]$ . Il vient :

$$\int_0^\pi x \sin(x)dx = [-x \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)dx = [-x \cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi = \pi$$

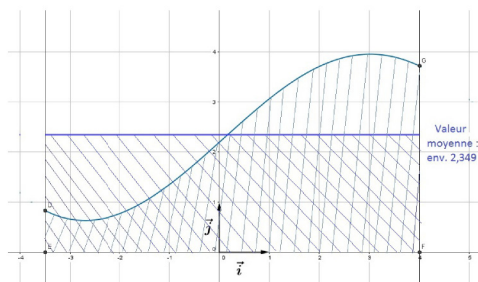
## 4. Applications

### A. Valeur moyenne d'une fonction

**Définition 14.3** Pour toute fonction  $f$  continue sur  $[a; b]$ , la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a; b]$  est le réel  $\mu$  défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

**Propriété 14.7** L'intégrale d'une fonction  $f$  continue et positive sur  $[a; b]$  est l'aire du rectangle dont les côtés ont pour longueur  $\mu$  et  $b-a$  :



$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \times \mu$$

**Propriété 14.8 (Inégalité de la moyenne)** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a; b]$ . On note  $m$  et  $M$  deux réels tels que pour tout  $x \in [a; b]$  on a  $m \leq f(x) \leq M$ . Alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

**Conséquences :** dans les conditions de la propriété, on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \text{ bien sûr si } a < b$$

Et aussi, il existe  $c \in [a; b]$  tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$$

**Exemple 14.5** Donner un encadrement de la valeur moyenne de la fonction  $f : x \mapsto e^{x^2}$  sur  $[0; \sqrt{2}]$ .

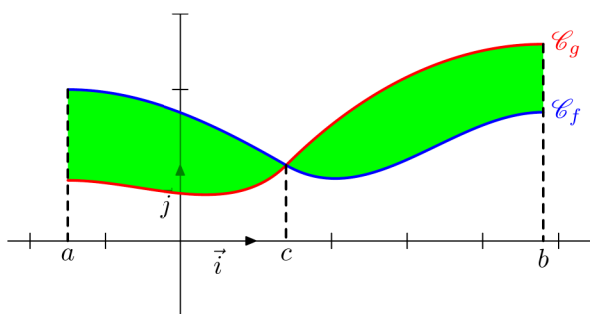
Sur  $[0; \sqrt{2}]$ , la fonction  $f$  est croissante donc pour  $x \in [0; \sqrt{2}]$ , on a  $f(0) \leq f(x) \leq f(\sqrt{2})$  soit  $1 \leq f(x) \leq e^2$ .

En appliquant l'inégalité de la moyenne, on obtient :  $1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx \leq e^2$  ou encore  $1 \leq \mu \leq e^2$  où  $\mu$  est la valeur moyenne de  $f$  sur  $[0; \sqrt{2}]$ .

## B. Calculs d'aires

**Propriété 14.9** Pour calculer l'aire délimitée par les courbes représentatives de deux fonctions  $f$  et  $g$  continues sur un intervalle  $[a; b]$  on procède ainsi :

- on décompose  $[a; b]$  en intervalles où la différence  $f - g$  est de signe constant ;
- on intègre alors la fonction  $f - g$  sur chacun de ces intervalles en veillant au lien entre intégrale et aire suivant son signe.

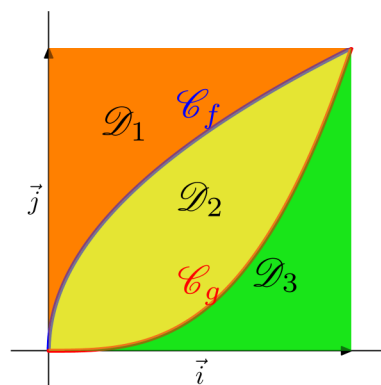


$$\mathcal{A} = \int_a^c (f - g)(t) dt - \int_c^b (f - g)(t) dt$$

Cela revient à calculer  $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ .

### Exemple 14.6

Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $[0; 1]$  par  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = x^3$  dont on a tracé les représentations graphiques sur la figure ci-contre. Déterminer l'aire de chacun des domaines coloriés.



Le domaine  $\mathcal{D}_1$  est délimité par  $(Oy)$ ,  $\mathcal{C}_f$  et la droite d'équation  $y = 1$  représentant la fonction affine  $h$  constante égale à 1. On a donc :

$$\mathcal{D}_1 = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx = \left[ x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Le domaine  $\mathcal{D}_2$  est délimité par  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  on a donc :

$$\mathcal{D}_2 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Et enfin,

$$\mathcal{D}_3 = \mathcal{A}_{\text{carré}} - (\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2) = 1 - \left( \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

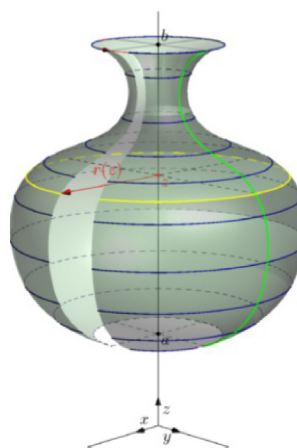
## C. Calculs de volumes

### Propriété 14.10

Un solide  $S$  est délimité par deux plans  $P_1$  et  $P_2$  d'équations respectives  $z = a$  et  $z = b$ .

Si la section du solide  $S$  par le plan  $P$  d'équation  $z = k$  où  $k \in [a; b]$  (ce plan est parallèle à  $P_1$  et  $P_2$ ) est une surface d'aire  $\mathcal{A}(k)$  alors le volume du solide  $S$  est donné par :

$$\mathcal{V} = \int_a^b \mathcal{A}(z) dz$$

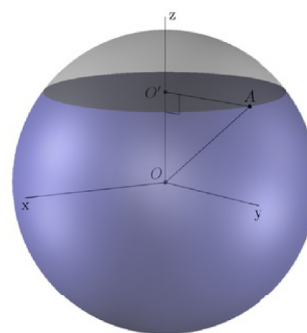


**Exemple 14.7** Calculer le volume d'une boule de rayon  $R$  à l'aide d'une intégrale.

On peut se contenter de calculer le volume d'une demi-boule posée sur le plan  $xOy$ . Pour  $k \in [0; R]$  on a alors  $\mathcal{A}(k) = \pi \times r^2$  où  $r$  est le rayon du disque obtenu par section de la boule par le plan d'équation  $z = k$ .

On a donc  $r = O'A = \sqrt{R^2 - k^2}$  (théorème de Pythagore dans  $OO'A$  rectangle en  $O'$  - voir figure ci-contre).

L'aire du disque est donc  $\mathcal{A}(k) = \pi(R^2 - k^2)$ .



Finalement, le volume de la boule est donc :

$$\mathcal{V} = 2 \int_0^R \mathcal{A}(z) dz = 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz = 2\pi \left[ R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R = 2\pi \times \left( \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

## D. Distance parcourue (cinématique)

Nous avons vu en première que si on connaît la position d'un mobile à chaque instant, on est capable de déterminer sa vitesse instantanée à chaque moment (bien sûr, si la fonction définissant la position est dérivable sur l'intervalle étudié...). Grâce à la propriété suivante, on est capable du contraire : connaître la distance parcourue grâce à la donnée de la vitesse à chaque instant.

**Propriété 14.11** Si la vitesse instantanée  $V(t)$  d'un mobile est connue pour tout  $t \in [a; b]$  alors la distance parcourue entre les instants  $t = a$  et  $t = b$  est égale à :

$$d = \int_a^b V(t) dt$$

**Exemple 14.8** La vitesse d'un objet en chute libre (sans frottement) lâché sans vitesse initiale à l'instant  $t = 0$  est donnée par  $V(t) = gt$ .

La distance parcourue au cours de la troisième seconde de chute est donc :

$$d = \int_2^3 gtdt = \left[ \frac{1}{2}gt^2 \right]_2^3 = \frac{1}{2}g(9 - 4) \approx \frac{1}{2} \times 9,81 \times 5 = 24,5 \text{ m}$$